

DRGANIA WŁASNE SAMOLOTU TU-154

Jan Błaszczyk

Abstract

In following paper the passenger aircraft solid-beam model used for normal modes calculation has been presented. Adopted method is based on three steps structure synthesis and finite element method. One dimensional discretization of deformable aircraft parts (wing, stabilizer, fuselage) was used. Dynamic equilibrium equations of these parts and dynamic-kinematic coupling terms have been given. The basic spectrum of an aircraft longitudinal symmetrical normal modes composed of eight first frequency $\omega_1 \div \omega_8$ has been determined.

Keywords - natural vibrations, spectrum vibrations, dynamic model.

Streszczenie

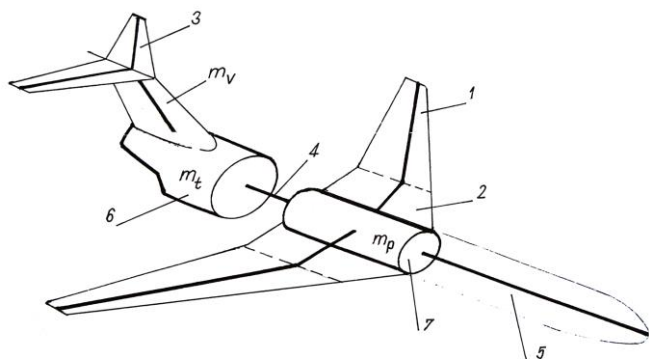
Przedstawiono bryłowo-belkowy model samolotu pasażerskiego do badania drgań własnych. Przyjęta metoda oparta jest na trójstopniowej syntezie struktury i technice elementów skończonych. Zastosowano jednowymiarową dyskretyzację odkształcalnych zespołów samolotu (skrzydła, usterzenie, segmenty kadłuba). Podano równania dynamicznej równowagi tych zespołów oraz dynamiczne i kinematyczne warunki sprzęgające. Wyznaczono podstawowe widmo na przykładzie podłużnych, symetrycznych drgań własnych samolotu składające się z ośmiu pierwszych częstości $\omega_1 \div \omega_8$.

Słowa kluczowe – drgania własne, widmo drgań, model dynamiczny

1. DYNAMICZNY MODEL SAMOLOTU

1.1. Wstęp, sformułowanie problemu

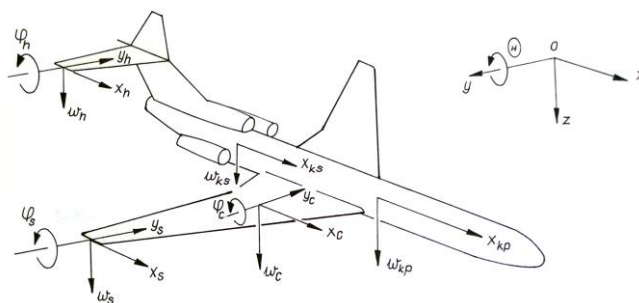
Problematyka drgań własnych samolotu ma istotne znaczenie dla ustalenia osobliwości lotu, szczególnie dla współczesnych samolotów rozwijających duże prędkości (np. [1]).



Rys. 1. Bryłowo-belkowy model samolotu do badania drgań własnych. Oznaczenia (odkształcalne zespoły): 1 – skrzydło doczepne, 2 – centropląt, 3 – usterzenie poziome, 4 – środkowa część kadłuba, 5 – nosowa część kadłuba. Bryły sztywne samolotu: 6 – bryła tylna o masie m_t , 7 – bryła przednia o masie m_p .

Zastosowanie metod numerycznych, w tym metody elementów skończonych [2, 3, 4, 5] stworzyło szerokie możliwości analizy problemów statyki i dynamiki złożonych konstrukcji, w tym rozgałęzionych przestrzennych układów mechanicznych, samolotów (por. [6, 7, 8, 9]).

W niniejszej pracy przedstawiono dynamiczny model odkształcalnego samolotu do badania częstości i postaci drgań własnych, stosując jednowymiarową dyskretyzację odkształcalnych zespołów konstrukcyjnych za pomocą elementów skończonych. Zastosowano trójstopniową syntezę odkształcalnych zespołów: skończone elementy → segment konstrukcji → zespół konstrukcyjny [10, 11]. Generalnie, podział odkształcalnych zespołów jest uwarunkowany występowaniem sprężystych połączeń między ruchomymi powierzchniami sterowymi i skrzydłem lub statecznikami [12]. W przypadku samolotu Tu-154, podział taki dotyczy skrzydła składającego się z centroplata i skrzydła doczepnego, które mają różne kąty skosu. Natomiast powierzchnie ruchome, sterowe (lotki, kłapy, stery,...) traktujemy jako sztywno zamocowane do swoich zespołów.



Rys. 2. Przyjęte układy współrzędnych odkształcalnych zespołów samolotu.

Referat stanowi kontynuację poprzednich prac dotyczących modelowania samolotów o różnych układach aerodynamiczno-konstrukcyjnych, symetrycznych [13, 14, 15] i niesymetrycznych [16, 17] oraz w konfiguracji z podwieszeniami zewnętrznymi [18, 19].

W modelu przyjęto, że odkształcalnymi zespołami są skrzydła (płat nośny), usterzenia oraz środkowa i nosowa część kadłuba, których parametry masowe i sprężyste zmieniają się w sposób ciągły i skokowy wzdłuż ich długości.

Założono, że analizowany samolot ma płaszczyznę symetrii masowej i sprężystej. W związku z tym drgania własne symetryczne względem tej płaszczyzny (podłużne drgania własne) nie sprzęgają się z innymi postaciami drgań (bocznymi drganiami własnymi) i oba rodzaje drgań można badać oddzielnie. W pracy rozpatrzono symetryczne drgania

zakładając, że samolot ma podłużną pionową płaszczyznę symetrii Oxz (Rys. 2).

Do przedniej bryły kadłuba zamocowane są odkształcalne skrzydła (Rys. 1), każde składające się z dwóch segmentów: części centroplata i skrzydła doczepnego (konsoli), które mogą wykonywać drgania skrętne i poprzeczne drgania giętne (Rys. 2)

$$\varphi_c = \varphi_c(y_c, t), \quad w_c = w_c(y_c, t)$$

$$\varphi_s = \varphi_s(y_s, t), \quad w_s = w_s(y_s, t) \quad (1)$$

Odształcalne części kadłuba, przednia (nosowa) i środkowa (Rys. 1) wykonują giętne drgania w płaszczyźnie symetrii samolotu Oxz (Rys. 2)

$$w_{kp} = w_{kp}(x_{kp}, t), \quad w_{ks} = w_{ks}(x_{ks}, t) \quad (2)$$

Do tylnego końca kadłuba zamocowane jest pionowe usterzenie kierunku, do jego końcówki (w układzie T) zamocowane jest usterzenie wysokości (poziome), które analogicznie do skrzydła, wykonuje drgania skrętne i poprzeczne drgania giętne

$$\varphi_h = \varphi_h(y_h, t), \quad w_h = w_h(y_h, t) \quad (3)$$

Jednocześnie traktujemy, że skrzydła i połówki usterzenia wysokości oraz usterzenie pionowe są nieodkształcalne w swoich płaszczyznach.

W dalszej części pracy rozpatrzmy drgania zespołów wykonujących ruchy (1) ÷ (3) na przykładzie giętno-skrętnych drgań skrzydła. Podamy w ostatecznej formie równania obejmujące centropląt, skrzydło doczepne i pozostałe odkształcalne zespoły.

Rozpatrzmy również równania ruchu sztywnych brył samolotu (Rys. 1), które stanowią dynamiczne warunki sprzęgające równania odkształcalnych zespołów.

Po uwzględnieniu warunków zgodności przemieszczeń i kątów obrotu nieodkształcalnych i odkształcalnych części samolotu oraz warunków brzegowych na zamocowanych i swobodnych końcach, otrzymujemy kompletny układ zależności, umożliwiający analizę częstości i symetrycznych postaci drgań własnych odkształcalnego samolotu.

1.2. Równania dynamicznej równowagi zespołów odkształcalnych

1.2.1. Uwagi ogólne

Odształcalne zespoły samolotu dzieli się na jednowymiarowe elementy o krawędziach prostopadłych do osi sztywności zespołu. W pracach [11, 10] wyprowadzono macierzowe równania dynamicznej równowagi elementu na przykładzie sprzężonych giętno-skrętnych drgań skrzydła, tj. wykonujących ruchy (1). Następnie podano rekurencyjny sposób otrzymania równań obejmujących cały segment płata (skrzydło doczepne, centropląt) jako element wyższego rzędu.

$$g_{sj} = X_{sj} g_{s0}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (4)$$

gdzie g_{sj} i g_{s0} są wektorami stanu w j -tym i zerowym (początkowym) przekroju skrzydła o składowych w postaci bezwymiarowej. Macierz X_{sj} o wymiarze 6×6 jest wyznaczana z rekurencyjnej zależności. Równania (4) są ogólnymi i dla zespołów wykonujących izolowane ruchy giętne, tj. dla środkowej i nosowej części kadłuba, przyjmują nieco inną postać. W naszym przypadku dla giętnych drgań

kadłuba w płaszczyźnie symetrii samolotu Oxz (Rys. 2), równania (4) zapiszemy w formie

$$g_{kj} = Y_{kj} g_{k0}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

gdzie wektory g_{kj} i g_{k0} mają podobne składowe jak wektory g_{sj} i g_{s0} określone wzorem (4), a macierz Y jest wymiaru 4×4 i reprezentuje masowe i sprężyste parametry odkształcalnych części kadłuba.

W dalszej części pracy podane zostaną w ostatecznej formie dla skończonej liczby elementów $j = n_k$ równania dynamicznej równowagi zespołów samolotu. Zgodnie z Rys. 1, mamy: $k=1$ dla skrzydła doczepnego, $k=2$ - dla centroplata, $k=3$ dla połówki usterzenia wysokości, $k=4$ dla środkowej części kadłuba i $k=5$ dla nosowej części kadłuba. Należy dodać, że do rozwiązania problemu symetrycznych drgań wystarczy rozpatrzenie ruchu „połówki” samolotu tzn. kadłuba wraz z jednym skrzydłem (konsola plus połówka centroplata) i połówką usterzenia wysokości. Drugie skrzydło i drugą połówkę usterzenia wysokości uwzględnimy w postaci odpowiednich symetrycznych sił w równaniach ruchu sztywnych brył kadłuba, w dalszej części pracy.

1.2.2. Skrzydło doczepne (konsola), centropląt

Wykorzystując wzory (4), równania dynamicznej równowagi segmentów skrzydła można zapisać w postaci układu równań macierzowych [10, 11]. Dla skrzydła doczepnego, dzielonego na n_1 elementów mają one postać

$$g_{s1} = X1 g_{s0}, \quad (6)$$

gdzie wektory g_s mają składowe

$$g_{s1} = [\bar{w}_{s1}, \bar{\psi}_{s1}, \bar{\varphi}_{s1}, \bar{Q}_{s1}, \bar{M}_{s1}, \bar{N}_{s1}]^T$$

$$g_{s0} = [\bar{w}_{s0}, \bar{\psi}_{s0}, \bar{\varphi}_{s0}, \bar{Q}_{s0}, \bar{M}_{s0}, \bar{N}_{s0}]^T, \quad (7)$$

którymi są bezwymiarowe parametry krawędziowe skrajnych przekrojów skrzydła doczepnego w przekroju początkowym (z indeksem „0”) i końcowym (z indeksem „1”, tj. przekrój połączenia z centroplatem). Są to uogólnione przemieszczenia i siły w skrajnych przekrojach tego zespołu samolotu, zdefiniowane w bezwymiarowej postaci

$$\bar{w}_{si} = \frac{w_{si}}{\alpha_i L_{od}}, \quad \bar{Q}_{si} = Q_{si} \frac{L_{od}^2}{EJ_{od}} \alpha_i^2,$$

$$\bar{M}_{si} = M_{si} \frac{L_{od}}{EJ_{od}} \alpha_i, \quad \bar{N}_{si} = N_{si} \frac{L_{od}}{GJ_{0od}} \alpha_i, \quad (8)$$

$$\alpha_{i+1} = l_{si+1} / L_{od}, \quad \text{dla } i = 0, 1.$$

w których: L_{od} , EJ_{od} i GJ_{0od} stanowią długość, sztywność zginania i sztywność skręcania przyjęte jako wielkości odniesieniowe. Macierz $X1_{6 \times 6}$ (wzór (6)) reprezentuje masowe i sprężyste charakterystyki skrzydła doczepnego.

W analogiczny sposób możemy zapisać związki łączące parametry krawędziowe drugiego segmentu skrzydła (połówka centroplata), dzielonego na n_2 elementów, w postaci

$$g_{c1} = X2 g_{c0}, \quad (9)$$

z wektorami o składowych

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{c1} &= [\bar{w}_{c1}, \psi_{c1}, \varphi_{c1}, \bar{Q}_{c1}, \bar{M}_{c1}, \bar{N}_{c1}]^T \\ \mathbf{g}_{c0} &= [\bar{w}_{c0}, \psi_{c0}, \varphi_{c0}, \bar{Q}_{c0}, \bar{M}_{c0}, \bar{N}_{c0}]^T \end{aligned} \quad (10)$$

Teraz wyrazami macierzy $\mathbf{X2}_{6 \times 6}$ są masowe i sprężyste charakterystyki centroplata. Wektory (10) mają analogiczne znaczenie jak dla skrzydła doczepnego zdefiniowane wzorami (7), lecz teraz dotyczą skrajnych przekrojów centroplata.

W celu wyznaczenia równań ważnych dla całego skrzydła należy wykorzystać związki zgodności sił i przemieszczeń centroplata i skrzydła doczepnego w przekroju ich połączenia. Czyli zdefiniować odpowiednie związki (warunki) łączące wektor \mathbf{g}_{s1} (7) z wektorem \mathbf{g}_{c0} (10). Warunki te, w ujęciu bezwymiarowym mają następującą postać

$$\begin{aligned} \bar{w}_{c0} &= \alpha_{12} \bar{w}_{s1}, \\ \psi_{c0} &= \psi_{s1} \cos \chi - \varphi_{s1} \sin \chi, \\ \varphi_{c0} &= \psi_{s1} \sin \chi + \varphi_{s1} \cos \chi, \\ \bar{Q}_{c0} &= \alpha_{21}^2 \bar{Q}_{s1}, \\ \bar{M}_{c0} &= \alpha_{21} (\bar{M}_{s1} \cos \chi - \beta^{-1} \bar{N}_{s1} \sin \chi), \\ \bar{N}_{c0} &= \alpha_{21} (\bar{N}_{s1} \cos \chi + \beta \bar{M}_{s1} \sin \chi), \\ \alpha_{12} &= l_s / l_c, \quad \alpha_{21} = \alpha_{12}^{-1}, \quad \chi = \chi_s - \chi_c, \\ \beta &= EJ_{od} / GJ_{0od} \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie oznaczono: l_s i l_c - długość doczepnego skrzydła i długość centroplata (do okuc „centroplata-kadłub”) mierzone wzdłuż osi sztywności tych zespołów, χ_s i χ_c - kąty skosu osi sztywności odpowiednio skrzydła doczepnego i centroplata.

Jeśli warunki sprzęgające w przekroju połączenia konsoli skrzydła z centroplatem (11) wykorzystamy do równań (6) i (9), wówczas otrzymamy równania dynamicznej równowagi połowy płata nośnego (właściwego skrzydła) w macierzowej postaci

$$\mathbf{g}_{c1} = \mathbf{S} \mathbf{g}_{s0}, \quad (12)$$

w którym parametry w przekroju mocowania płata do kadłuba (wektor \mathbf{g}_{c1}) wyrażono przez krawędziowe parametry swobodnego końca skrzydła doczepnego (wektor \mathbf{g}_{s0}). Wyrazy macierzy \mathbf{S} przedstawimy formułą

$$S_{ik} = \sum_{j=1}^6 X2_{ij}^* X1_{jk}, \quad (13)$$

dla $k, j = 1, 2, \dots, 6$. Wyrazy macierzy $X2_{6 \times 6}^*$ określone są wzorami

$$\begin{aligned} X2_{i1}^* &= \alpha_{12} X2_{i1}, \quad X2_{i4}^* = \alpha_{21}^2 X2_{i4}, \\ X2_{i2}^* &= X2_{i2} \cos \chi + X2_{i3} \sin \chi, \\ X2_{i3}^* &= X2_{i3} \cos \chi - X2_{i2} \sin \chi, \\ X2_{i5}^* &= \alpha_{21} (X2_{i5} \cos \chi + \beta X2_{i6} \sin \chi), \\ X2_{i6}^* &= \alpha_{21} (X2_{i6} \cos \chi - \beta^{-1} X2_{i5} \sin \chi) \end{aligned} \quad (14)$$

dla $i = 1, 2, \dots, 6$.

Macierz $\mathbf{S}_{6 \times 6}$ reprezentuje masowe i sztywnościowe parametry płata nośnego samolotu. Wyrazy tej macierzy

stanowią kombinacje elementów składowych macierzy skrzydła doczepnego $\mathbf{X1}_{6 \times 6}$, macierzy centroplata $\mathbf{X2}_{6 \times 6}$ przy wykorzystaniu warunków (11).

1.2.3. Usterzenie wysokości

Rozpatrując w podobny sposób wolnonośne poziome usterzenie wysokości, podlegające sprzężonym giętno-skrętnym ruchom (3) przy podziale na n_3 elementów, otrzymujemy równanie obejmujące ten zespół

$$\mathbf{g}_{h1} = \mathbf{X3} \mathbf{g}_{h0}, \quad (15)$$

z wektorami o składowych

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{h1} &= [\bar{w}_{h1}, \psi_{h1}, \varphi_{h1}, \bar{Q}_{h1}, \bar{M}_{h1}, \bar{N}_{h1}]^T, \\ \mathbf{g}_{h0} &= [\bar{w}_{h0}, \psi_{h0}, \varphi_{h0}, \bar{Q}_{h0}, \bar{M}_{h0}, \bar{N}_{h0}]^T \end{aligned} \quad (16)$$

Macierz $\mathbf{X3}_{6 \times 6}$ reprezentuje masowe i sprężyste parametry usterzenia wysokości.

1.2.4. Segmenty kadłuba

W ruchu symetrycznym kadłub wykonuje ruchy (2) w płaszczyźnie symetrii samolotu Oxz (Rys. 2). Dla rozpatrywanego samolotu przyjęto, że kadłub składa się z dwu brył sztywnych i dwóch zespołów odkształcalnych: środkowej i nosowej. Część środkowa łączy bryły sztywne, część nosowa mocowana do bryły przedniej stanowi belkę wspornikową (Rys. 1). W dalszym ciągu rozpatrzmy symetryczny ruch segmentów kadłuba w płaszczyźnie Oxz (Rys. 2).

Równania dynamicznej równowagi tych zespołów, w ruchu symetrycznym, zapiszemy wykorzystując wzory (5). Dla pierwszego segmentu tj. środkowej części kadłuba, łączącego sztywne bryły samolotu, przy podziale na n_4 elementów, mają one postać

$$\mathbf{g}_{ks1} = \mathbf{Y1} \mathbf{g}_{ks0}, \quad (17)$$

gdzie $\mathbf{Y1}_{4 \times 4}$ reprezentuje masowe i sprężyste parametry tej części kadłuba w płaszczyźnie symetrii samolotu, a wektory \mathbf{g}_k mają składowe

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{ks1} &= [\bar{w}_{ks1}, \psi_{ks1}, \bar{Q}_{ks1}, \bar{M}_{ks1}]^T \\ \mathbf{g}_{ks0} &= [\bar{w}_{ks0}, \psi_{ks0}, \bar{Q}_{ks0}, \bar{M}_{ks0}]^T \end{aligned} \quad (18)$$

Podobne równania zapiszemy dla drugiego segmentu kadłuba tj. dla części przedniej, nosowej. Odkształcalna nosowa część kadłuba jest mierzona wzdłuż osi podłużnej kadłuba do przedniej wręgi siłowej kadłuba umieszczonej w płaszczyźnie ścianki przedniego dźwigara skrzydła. Równania dynamicznej równowagi nosowej części kadłuba przedstawimy podobnie jak wzorami (17) dotyczącymi środkowej części kadłuba. Dla tej części kadłuba, podzielonej na n_5 elementów, zapiszemy je w formie

$$\mathbf{g}_{kp1} = \mathbf{Y2} \mathbf{g}_{kp0}, \quad (19)$$

W tym przypadku macierz $\mathbf{Y2}_{4 \times 4}$ reprezentuje masowe i sprężyste parametry nosowej części kadłuba, zaś wektory \mathbf{g}_{kp} mają składowe będące parametrami krawędziowymi skrajnych przekrojów tej części kadłuba.

1.3. Równania ruchu sztywnych brył samolotu

Dotąd podano równania dynamicznej równowagi zespołów konstrukcyjnych samolotu, które przyjęto jako

odkształcalne. Są to równania: (12) - dotyczące skrzydła, (15) - połówki usterzenia wysokości, (17) i (19) dla odkształcalnych części kadłuba. Do tych równań należy dodać warunki sprzęgające dynamiczne i kinematyczne. Warunki dynamiczne wynikają z rozpatrzenia ruchu sztywnych brył samolotu.

Bryłę przednią stanowi część samolotu (głównie kadłuba) zawarta w obszarze centropłata i wzmocnionych wręg kadłuba zabudowanych w płaszczyznach okuć „płat-kadłub”. Bryłę tylną, o znacznie większej masie niż bryła przednia, stanowi tylna (końcowa) część kadłuba w obszarze mocowania usterzeń. Dodatkowo masę tej bryły zwiększają zabudowane trzy jednostki napędowe. W ruchu symetrycznym traktuje się, że usterzenie pionowe jest nieodkształcalne i wchodzi również w skład tylnej bryły, zwiększając jej parametry masowe. Reasumując, do przedniej bryły kadłuba mocowane są skrzydła i odkształcalne części kadłuba - środkowa i nosowa. Odpowiednie warunki zgodności przemieszczeń i ugięć w przekrojach połączeń tych zespołów zostaną podane w dalszej części opracowania.

Rozpatrzmy płaski ruch, w płaszczyźnie symetrii Oxz (Rys. 2), przedniej i tylnej bryły samolotu przyjmując, że oddziaływania odkształcalnych zespołów na te bryły są uwzględnione za pomocą odpowiednich sił i momentów (Rys. 3 i Rys. 4).

Przy założeniu, że rozpatrujemy małe drgania, po odrzuceniu nieliniowych wyrazów, otrzymujemy równania ruchu przedniej bryły samolotu:

$$\begin{aligned} m_p \ddot{z}_p(t) &= Q_{kp0}(t) - Q_{ks1}(t) - 2Q_{c1}(t), \\ I_p \ddot{\Theta}_p(t) &= M_{kp0}(t) - M_{ks1}(t) - 2N_{c1}^*(t) + \\ &+ 2(l_{p2} - l_{p1})Q_{c1}(t) - l_{p1}Q_{ks1}(t) + \\ &- (l_{p4} - l_{p1})Q_{kp0}(t) + 2l_{p3}P_s(t) \end{aligned} \quad (20)$$

oraz równania bryły tylnej:

$$\begin{aligned} m_{tv} \ddot{z}_{tv}(t) &= Q_{ks0}(t) - 2Q_{h1}(t), \\ I_{tv} \ddot{\Theta}_{tv}(t) &= M_{ks0}(t) - 2N_{h1}^*(t) + \\ &- l_{tv1}Q_{ks0}(t) + 2l_{tv3}P_h(t) \end{aligned} \quad (21)$$

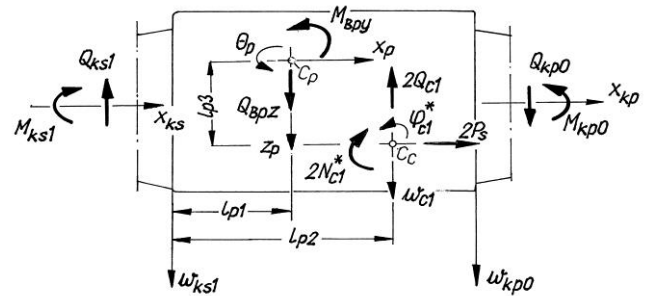
gdzie

$$\begin{aligned} 2N_{c1}^* &= 2(N_{c1} \cos \chi_c + M_{c1} \sin \chi_c), \\ 2N_{h1}^* &= 2(N_{h1} \cos \chi_h + M_{h1} \sin \chi_h) \end{aligned} \quad (22)$$

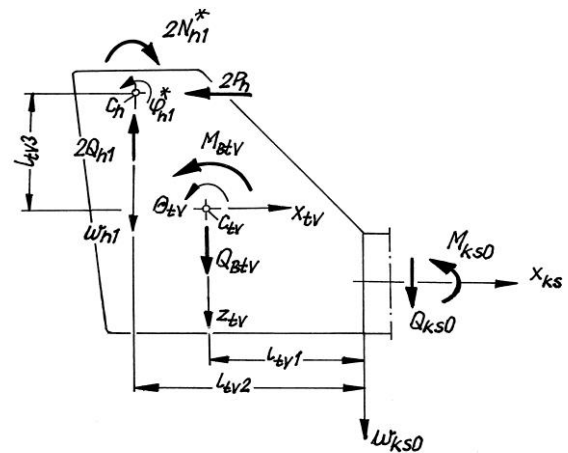
w których oznaczono: z_p, z_{tv} i Θ_p, Θ_{tv} - przemieszczenia liniowe i kąty obrotu przedniej i tylnej bryły samolotu; Q_{ks0}, M_{ks0} i Q_{ks1}, M_{ks1} - siła poprzeczna i moment zginający środkowej odkształcalnej części kadłuba w przekroju początkowym (zerowym) i końcowym; Q_{kp0} i M_{kp0} - siła poprzeczna i moment zginający w zerowym przekroju nosowej części kadłuba (przy płacie nośnym); Q_{c1}, M_{c1}, N_{c1} i Q_{h1}, M_{h1}, N_{h1} - siła poprzeczna, moment zginający, moment skręcający w końcowych przekrojach centropłata i połówki usterzenia wysokości; P_c i P_h - składowe sił bezwładności połówki płata i połówki usterzenia wysokości, działające w płaszczyźnie tych zespołów na sztywne bryły samolotu:

$$\begin{aligned} P_c(t) &= -0,5 m_{pl} l_{p3} \ddot{\Theta}_p(t), \\ P_h(t) &= -0,5 m_h l_{tv3} \ddot{\Theta}_{tv}(t) \end{aligned} \quad (23)$$

m_p, m_{tv}, m_{pl}, m_h - masa przedniej bryły samolotu, tylnej bryły wraz z masą usterzenia pionowego, płata nośnego i usterzenia poziomego odpowiednio; I_p, I_{tv} - masowe momenty bezwładności przedniej bryły samolotu i tylnej bryły wraz usterzeniem pionowym; $l_{p1} \div l_{p3}$ i $l_{tv1} \div l_{tv3}$ - odpowiednie odległości pokazane na Rys. 3 i Rys. 4.



Rys. 3. Siły i momenty działające na przednią sztywną bryłę samolotu.



Rys. 4. Siły i momenty działające na tylną bryłę samolotu.

Przyjmujemy, że wszystkie funkcje występujące w równaniach (20) i (21) są harmonicznie zmienne z czasem, podobnie jak (1) ÷ (3). W związku z tym zapiszemy

$$z_p(t) = z_{p0} e^{i\omega t}, \quad \Theta_p(t) = \Theta_{p0} e^{i\omega t} \quad (24)$$

$$Q_{kp0}(t) = Q_{kp0} e^{i\omega t}, \quad M_{kp0}(t) = M_{kp0} e^{i\omega t}$$

Po podstawieniu zależności (23) i (24) do równań (20) i (21) otrzymujemy wyrażenia będące dynamicznymi warunkami sprzęgającymi równania odkształcalnych zespołów samolotu. Równania te można również sprowadzić do postaci bezwymiarowej.

Niżej przedstawimy kinematyczne warunki sprzęgające równania odkształcalnych zespołów (12), (15), (17) i (19). Są to warunki w przekrojach połączeń, zespołów odkształcalnych i sztywnych brył samolotu. Dla części

przedniej samolotu zapisane w bezwymiarowej postaci (por. Rys. 3)

$$\begin{aligned}\bar{z}_{p0} &= \frac{\bar{z}_{p0}}{L_{od}} = \alpha_{ks} \bar{w}_{ks1} + \bar{l}_{p1} \psi_{ks1} = \\ &= \alpha_{kp} \bar{w}_{kp0} - (\bar{l}_{p4} - \bar{l}_{p1}) \psi_{kp0} = \\ &= \alpha_c \bar{w}_{c1} + (\bar{l}_{p2} - \bar{l}_{p1}) \varphi_{c1}^*, \quad (25) \\ \Theta_{p0} &= \varphi_{c1}^* = -\psi_{ks1} = -\psi_{kp0} \cdot \\ \psi_{c1} &= 0, \quad \varphi_{c1}^* = \varphi_{c1} \cos \chi_c\end{aligned}$$

Podobnie sformułujemy warunki dla tylnej bryły samolotu (por. Rys. 4)

$$\begin{aligned}\bar{z}_{tv0} &= \frac{\bar{z}_{tv0}}{L_{od}} = \alpha_{ks} \bar{w}_{ks0} - \bar{l}_{tv1} \psi_{ks0} = \\ &= \alpha_h \bar{w}_{h1} + (\bar{l}_{tv1} - \bar{l}_{tv2}) \varphi_{h1}^*, \quad (26) \\ \Theta_{tv0} &= \varphi_{h1}^* = -\psi_{ks0}, \\ \psi_{h1} &= 0, \quad \varphi_{h1}^* = \varphi_{h1} \cos \chi_h\end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha_c = \frac{l_c}{L_{od}}; \alpha_h = \frac{l_h}{L_{od}}; \alpha_{ks} = \frac{l_{ks}}{L_{od}}; \alpha_{kp} = \frac{l_{kp}}{L_{od}}.$$

Oznaczenia długości odpowiednich zespołów samolotu: centroplata - l_c , połówki usterzenia wysokości - l_h , środkowej odkształcalnej części kadłuba - l_{ks} , i nosowej części kadłuba - l_{kp} .

Ponadto należy uwzględnić jednorodne warunki dotyczące uogólnionych sił na swobodnych końcach odkształcalnych zespołów samolotu. W kolejności dla doczepnego skrzydła, połówki usterzenia wysokości oraz dla nosowej części kadłuba

$$\begin{aligned}Q_{s0} &= M_{s0} = N_{s0} = 0, \\ Q_{h0} &= M_{h0} = N_{h0} = 0, \quad (27) \\ Q_{kp1} &= M_{kp1} = 0.\end{aligned}$$

1.4. Równanie częstości i postać drgań własnych

Dla wyznaczenia równania częstości problemu wykorzystamy równania odkształcalnych zespołów oraz odpowiednie warunki dynamiczne, kinematyczne i brzegowe. Równania odkształcalnych zespołów: skrzydła (12), połówki usterzenia wysokości (15), odkształcalnych części kadłuba (środkowej i nosowej) - (17) i (19), które wraz z warunkami dynamicznymi (20) i (21), kinematycznymi (25) i (26) oraz brzegowymi (27), tworzą kompletny układ równań do rozwiązania problemu.

Po wykonaniu szeregu czynności porządkujących, ostatecznie otrzymujemy jednorodny układ równań algebraicznych postaci:

$$C p = 0 \quad (28)$$

gdzie wektor p ma składowe

$$p = [\bar{w}_{h0}, \psi_{h0}, \varphi_{h0}, \bar{w}_{ks0}, \psi_{ks0}, \bar{Q}_{ks0}, \bar{M}_{ks0}, \bar{M}_{kp0}, \bar{Q}_{kp0}, \bar{w}_{kp0}, \psi_{kp0}, \varphi_{s0}, \psi_{s0}, \bar{w}_{s0}]^T, \quad (29)$$

którymi są uogólnione przemieszczenia przekrojów początkowych (zerowych) odkształcalnych zespołów samolotu (połówka usterzenia wysokości, nosowa część kadłuba i doczepna część skrzydła) oraz siła poprzeczna i moment zginający dla środkowej i nosowej części kadłuba w ich przekrojach początkowych. Macierz $C_{14 \times 14}$ jest globalną macierzą układu reprezentującą masowe i sprężyste parametry odkształcalnych i sztywnych zespołów analizowanego samolotu.

Poszukiwane równanie częstości problemu otrzymujemy ze znikania wyznacznika charakterystycznego układu równań (28)

$$\Delta = \det C = 0 \quad (30)$$

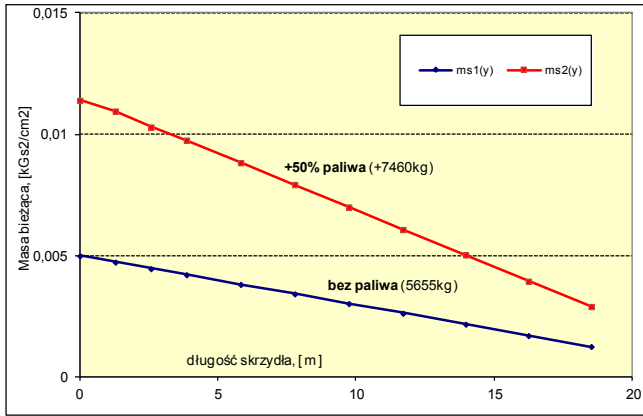
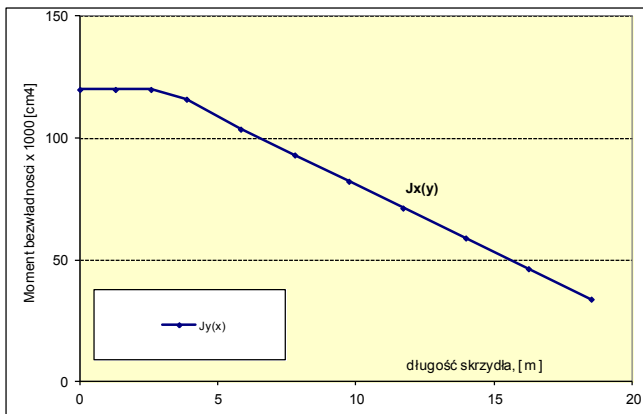
Po wyznaczeniu pierwiastków - częstości drgań własnych z równania (30), dla wyznaczenia postaci drgań, z równań (28) otrzymujemy początkowe parametry krawędziowe (29), przyjmując jeden z nich jako znany (np. $w_{s0} = 1$). Wstawiając wyznaczone parametry krawędziowe do równań odpowiednich zespołów konstrukcyjnych, dla kolejnych liczb naturalnych $j = 1, 2, 3, \dots$, przy uwzględnieniu warunków dynamicznych i kinematycznych, otrzymujemy ostatecznie wartości poszukiwanych parametrów na krawędziach wszystkich elementów, na które podzielono analizowany samolot.

2. CHARAKTERYSTYKI MASOWE I SPRĘŻYSTE ODKSZTAŁCALNYCH ZESPOŁÓW

W celu uzyskania widma częstości rozpatrywanego układu samolotu należy dysponować odpowiednimi danymi technicznymi. Należą do nich dane masowe i geometryczne sztywnych i odkształcalnych części samolotu. Do najważniejszych należą rozkłady parametrów masowych i sprężystych zespołów które przyjęto jako odkształcalne w proponowanym dynamicznym modelu. Dla zespołów wykonujących sprzężone ruchy giętno-skrętne (1) i (3) - płat nośny i usterzenie wysokości - są to rozkłady masy bieżącej $m(y)$ i masowego momentu bezwładności na jednostkę długości $Jm(y)$, dalej rozkłady geometrycznych (osiowych - $J_x(y)$ i biegunowych - $J_0(y)$) momentów bezwładności w kolejnych przekrojach zespołu samolotu (centropląt, skrzydło doczepne, usterzenie). Ponadto należy znać położenie środka ciężkości (sc) i środka sił poprzecznych ($\acute{s}sp$) w każdym przekroju zespołu [20, 21], w celu ustalenia mimośrodów $e(y)$. Dla $e(y) \neq 0$ mamy sprzężenie ruchów podłużnych ze skręcaniem przekroju.

Przykładowe dane dotyczące skrzydła (centropląt plus skrzydło doczepne) przedstawiono na Rys. 5 i Rys. 6. W pierwszym pokazano rozkłady bieżącej masy $m_s(y)$ wzdłuż skrzydła (dla skrzydła pustego oraz z pozostałością 50% paliwa w zbiornikach integralnych). Obydwa rozkłady wyznaczono proporcjonalnie do zmiany ciężkości bieżącej zespołu [22, 23]. Na Rys. 6 przedstawiono rozkład geometrycznego momentu bezwładności skrzydła przy wykorzystaniu materiałów [24, 25].

Dane dla usterzenia wysokości pozyskano podobnie jak w przypadku skrzydła. Punktem wyjścia było przyjęcie odpowiednich maksymalnych obciążeń działających na usterzenie. Należy dodać, że wymiarującym dla usterzenia jest z reguły obciążenie występujące podczas wykonywania manewru. Ustalono je na ponad 40 T. Dla takiej wartości wyznaczono parametry sztywnościowe tego zespołu.

Rys. 5. Rozkład bieżącej masy skrzydła $m_s(y_s)$.Rys. 6. Rozkład geometrycznego momentu bezwładności $J_x(y)$ wzdłuż długości skrzydła.

W rozpatrywanym problemie symetrycznych drgań w płaszczyźnie symetrii samolotu Oxz (Rys. 2), dla segmentów kadłuba wykonujących ruchy (2) wystarczy rozkład masy biejącej kadłuba $m_k(x)$ i rozkład sztywności zginania $EJ_s(x)$. Natomiast dla sztywnych brył samolotu: geometria, masy i masowe momenty bezwładności względem osi Oy .

W przypadku kadłuba, potrzebne jest nieco mniej danych. Kadłub samolotu Tu-154, zespół o dużym wydłużeniu ($\lambda_k > 10$), traktuje się jako klasyczną belkę [26, 27] podpartą w okuciach „centropłat-kadłub”, a więc w trzech punktach podparcia [24, 25]. Belkę obciążono w sposób ciągły (od masy konstrukcji, załogi, pasażerów i paliwa – rozkład przedziałami skokowo zmienny), dodatkowo obciążono siłą na usterzeniu poziomym przy manewrze [22, 23]. Dla takiego układu wykonano rozkłady sił wewnętrznych (siły tnące i momenty zginające) wzdłuż kadłuba.

W wyniku otrzymano rozkłady geometrycznego momentu bezwładności $J_y(x_k)$ względem osi bocznej (Rys. 6). Rozkład masy wzdłuż kadłuba $m_k(x_k)$ jest zależny od konfiguracji masowej samolotu (masy startowej, wariantu załadowania,...). Przy wyznaczaniu niezbędnych parametrów masowych i sprężystych zespołów samolotu posłużyła się specjalistyczną wiedzą inżynierską [28, 29, 30, 31, 32].

3. ANALIZA NUMERYCZNA

Dla potrzeb analizy numerycznej zredagowano program komputerowy w języku Fortran z wykorzystaniem PC-ta. Program umożliwia obliczanie częstości i postaci drgań

własnych samolotu, przy zastosowaniu jednowymiarowej dyskretyzacji zespołów płatowca.

W programie oblicza się pierwiastki równania częstości, stosując metodę bisekcji [33], eliminację Gaussa z wyborem największego elementu i wykorzystaniu efektu pasowości macierzy $C_{14 \times 14}$ układu (28).

Do obliczeń, odkształcalne zespoły samolotu dzielono na elementy belkowe. Skrzydło doczepne na 7 elementów, centropłat – 3, połówkę usterzenia wysokości – 5, środkową część kadłuba – 3 i nosową część kadłuba na 10 elementów. W przedstawionym wariancie obliczeniowym samolot łącznie zawiera 28 elementów, co stanowi ponad 130 stopni swobody.

3.1. Widmo drgań układu

Wyznaczono osiem najmniejszych, kolejnych częstości widma, które zestawiono w Tab. 1. W kolumnie drugiej podano widmo drgań $\omega_{k,0}$ otrzymane dla samolotu bez paliwa w zbiornikach integralnych skrzydła (Rys. 5, dolny rozkład masy), w kolumnie trzeciej widmo $\omega_{k,50}$ – z pozostałością 50% paliwa w zbiornikach skrzydłowych (Rys. 5, rozkład masy górny). Masa samolotu w pierwszym wariancie wynosi 72,2 tony, w drugim jest masą tzw. obliczeniową wynoszącą 87,1 ton [25]. W kolumnie czwartej podano oszacowanie względnej zmiany częstości $\Delta\omega_k$ dla wymienionych dwóch konfiguracji masowych samolotu zgodnie z wzorem

$$\Delta\omega_k = \frac{\omega_{k,50} - \omega_{k,0}}{\omega_{k,0}} 100[\%] \quad (31)$$

Tab. 1. Widma drgań samolotu

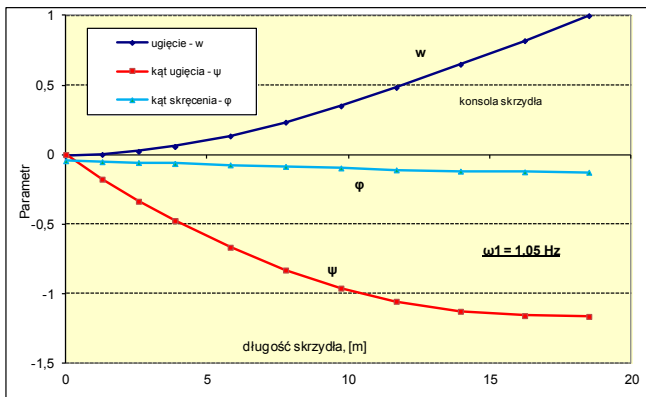
k	Częstość $\omega_{k,0}$ [Hz] (skrzydło bez paliwa)	Częstość $\omega_{k,50}$ [Hz] (skrzydło z pozostałością 50% paliwa)	$\Delta\omega_k$ [%]	Zespół samolotu, postać drgań
1	2	3	4	5
1	1,05	0,68	-35,2	Sk, Ig
2	2,12	2,09	-1,42	$Ust. H, Ig$
3	2,37	2,64	11,4	Kd, Ig
4	5,08	3,3	-35,04	Sk, IIg
5	8,85	8,66	-2,15	?
6	10,87	10,3	-5,24	Kd, IIg lub $Ust.H, IIg$
7	11,16	10,94	-1,97	Sk, Is
8	13,18	11,2	-15,02	$Sk, IIIg$

Przyjęte oznaczenia: Kd – kadłub, Sk – skrzydło, $Ust. H$ – usterzenie wysokości, g – zginanie, s – skręcanie; I, II, III – pierwsza, druga i trzecia postać (np. $Ust.H, Ig$ – dominują giętkie drgania usterzenia wysokości, pierwsza postać).

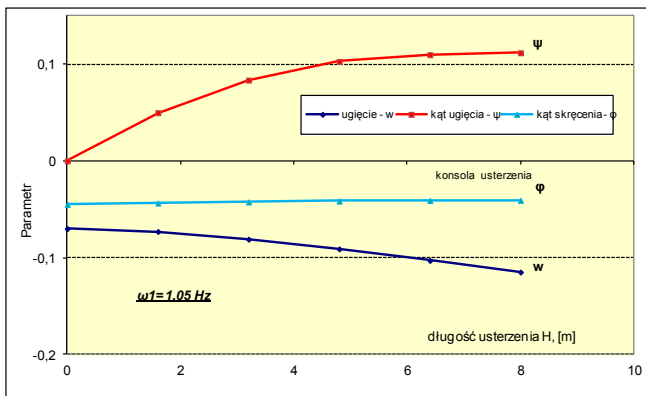
Na Rys. 7 ÷ Rys. 15 pokazano przykładowe rezultaty obliczeń częstości $\omega_1 \div \omega_3$ i odpowiadających im postaci drgań. Wykresy pokazują przebiegi bezwymiarowego ugięcia w , kąta ugięcia ψ i kąta skręcenia ϕ dla skrzydła i połówki usterzenia wysokości. W przypadku kadłuba (Rys. 13, Rys. 14 i Rys. 15) brak kąta skręcenia ($\phi=0$) z uwagi na rozpatrywany symetryczny ruch samolotu. Wszystkie wykresy są wykonane przy założeniu, że bezwymiarowe ugięcie swobodnego końca skrzydła jest jednostkowe.

Dla ustalenia, które z przemieszczeń ma dominujący charakter zastosowano metodykę z pracy [34], polegającą na wykonaniu obliczeń zmieniając jedną ze sztywności odkształcalnych zespołów i badając, która częstość zmienia

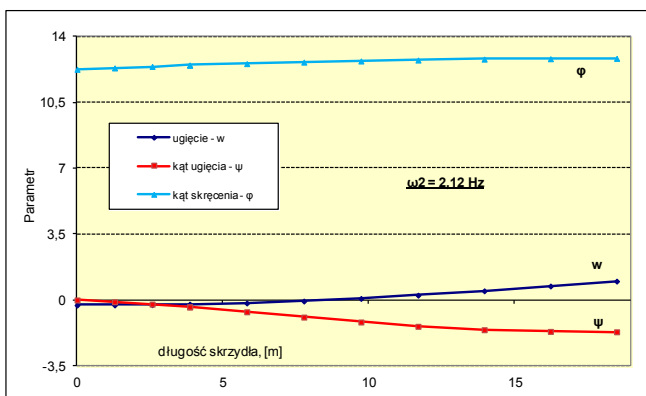
się najwięcej. W ten sposób przyporządkowano kolejne częstotliwości widma odkształcalnym zespołom samolotu (Tab. 1, kolumna 5).



Rys. 7. Postacie skrzydłowe odpowiadające pierwszej częstotliwości drgań własnych samolotu $\omega_1 = 1,05$ Hz. Oznaczenia: w – bezwymiarowe przemieszczenie skrzydła, ψ – kąt ugięcia, ϕ – kąt skręcenia.



Rys. 8. Postacie usterzenia wysokości odpowiadające pierwszej częstotliwości drgań własnych samolotu $\omega_1 = 1,05$ Hz. Oznaczenia jak na Rys. 7.

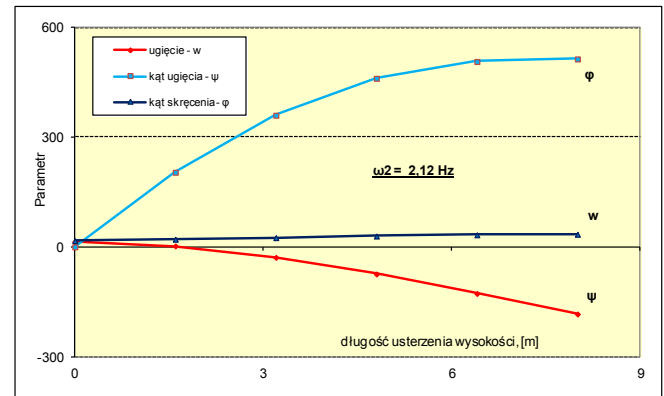


Rys. 9. Postacie skrzydłowe dla drugiej częstotliwości drgań własnych samolotu $\omega_2 = 2,12$ Hz. Oznaczenia jak na Rys. 7.

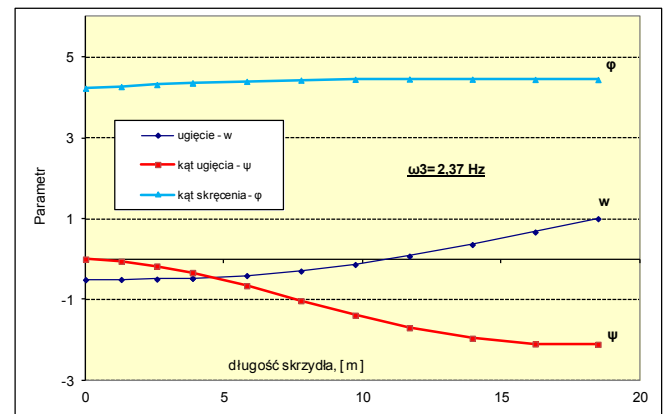
Z obliczeń widma drgań własnych samolotu, przy pustych zbiornikach skrzydłowych, najniższa częstota $\omega_1=1,05$ Hz dotyczy giętych drgań skrzydła. Widać to również z porównania bezwymiarowego ugięcia odkształcalnych zespołów na wykresach postaci (Rys. 7, Rys. 8 i Rys. 13).

W badanym widmie cztery częstotliwości ($\omega_1, \omega_4, \omega_7, \omega_8$) są skrzydłowe, w tym pierwsza, czwarta i ósma z dominującym zginaniem, natomiast siódma dotyczy

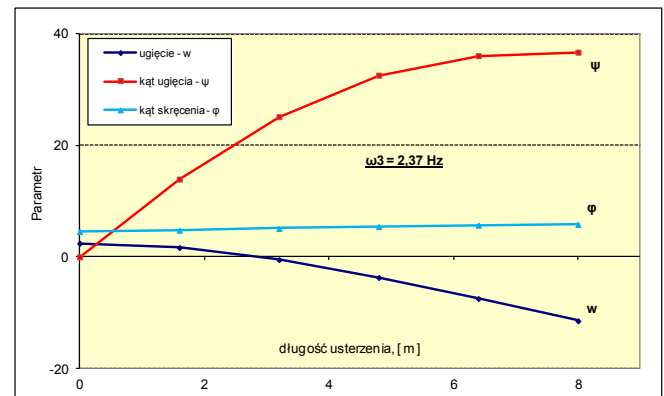
skręcania. Ta ostatnia, niezwykle przydatna do oceny właściwości flatterowych samolotu.



Rys. 10. Postacie usterzenia wysokości dla drugiej częstotliwości drgań własnych samolotu $\omega_2 = 2,12$ Hz. Oznaczenia jak na Rys. 7.



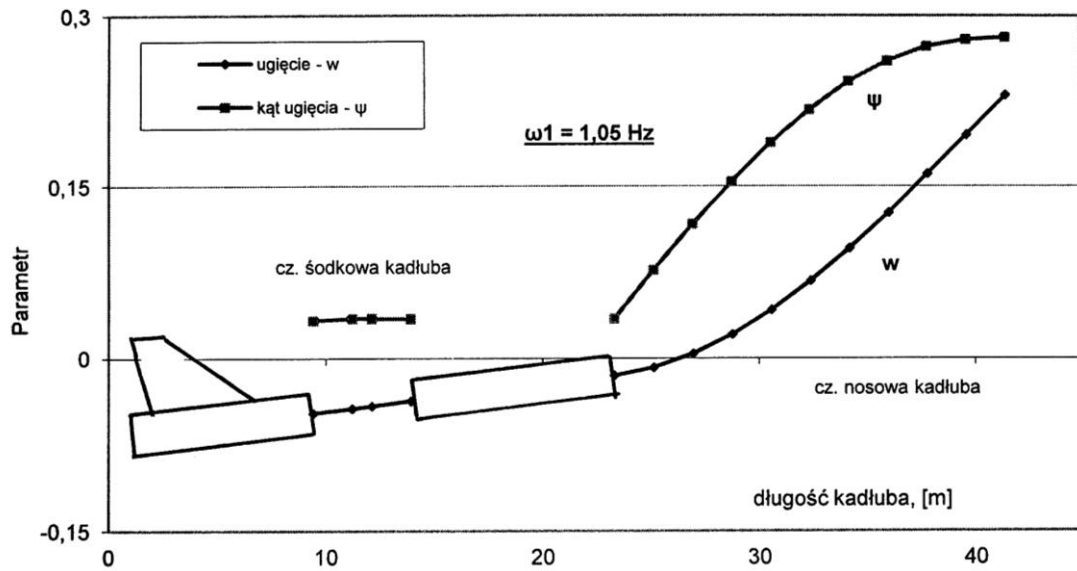
Rys. 11. Postacie skrzydłowe odpowiadające trzeciej częstotliwości drgań własnych samolotu $\omega_3 = 2,37$ Hz. Oznaczenia jak na Rys. 7.



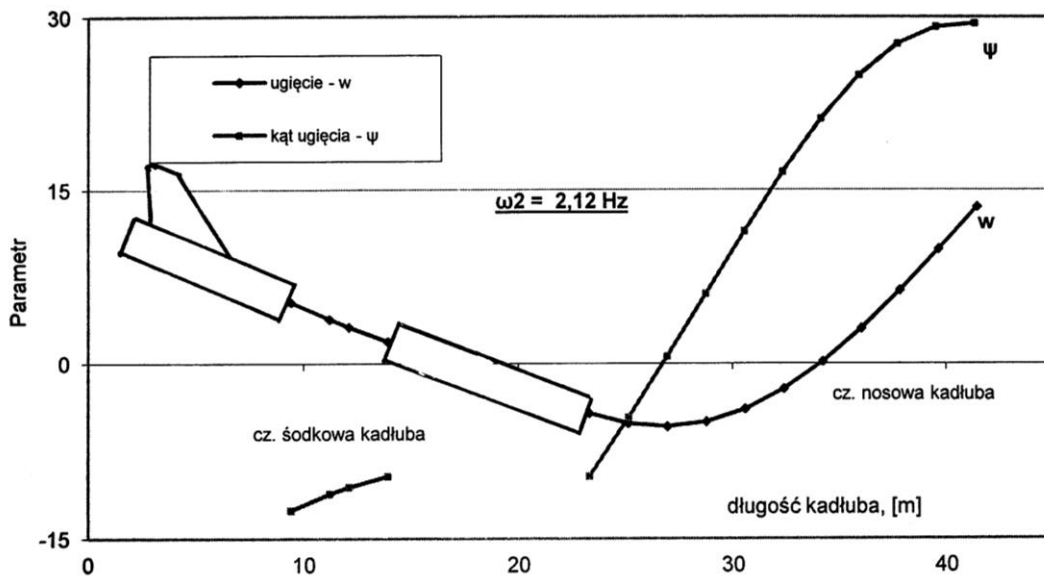
Rys. 12. Postacie usterzenia wysokości odpowiadające trzeciej częstotliwości drgań własnych samolotu $\omega_3 = 2,37$ Hz. Oznaczenia jak na Rys. 7.

3.2. Uwagi końcowe

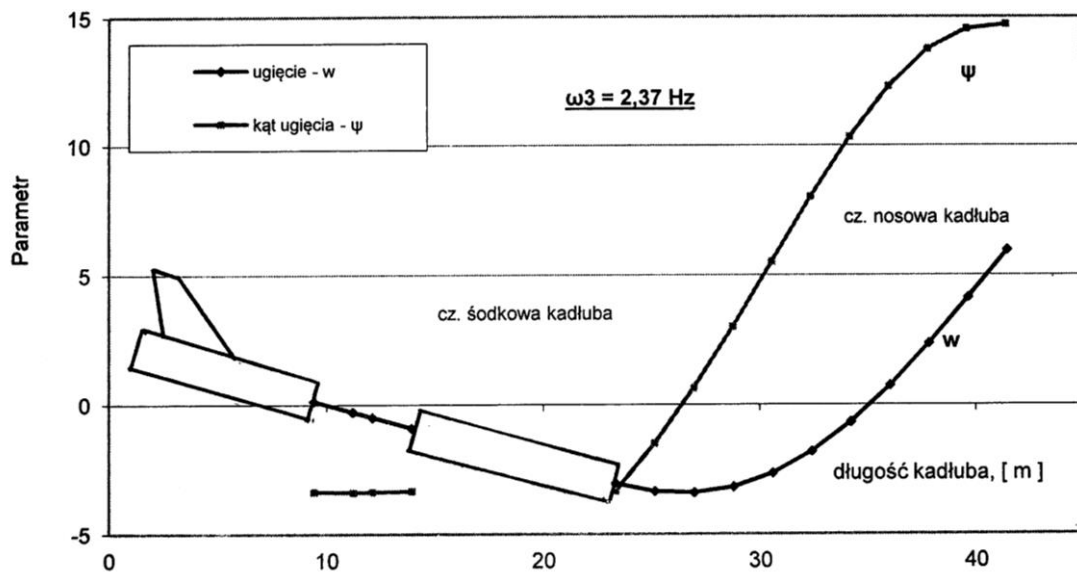
W pracy zaproponowano dynamiczny model samolotu pasażerskiego na przykładzie konstrukcji Tu-154, oparty na jednowymiarowej dyskretyzacji odkształcalnych zespołów. Przedstawiona metodyka jest przydatna do praktycznych obliczeń komputerowych. Na podstawie wcześniejszych prac oraz przeprowadzonych obliczeń samolotu Tu-154 można sformułować szereg uwag:



Rys. 13. Postacie kadłubowe dla pierwszej częstotliwości drgań własnych samolotu $\omega_1 = 1,05$ Hz. Oznaczenia: w – bezwymiarowe ugięcie, ψ – kąt ugięcia.



Rys. 14. Postacie kadłubowe dla drugiej częstotliwości drgań własnych samolotu $\omega_2 = 2,12$ Hz. Oznaczenia jak na Rys. 13.



Rys. 15. Postacie kadłubowe dla trzeciej częstotliwości drgań własnych samolotu $\omega_3 = 2,37$ Hz. Oznaczenia jak na Rys. 13.

- Wszystkie równania w dynamicznym modelu samolotu (odkształcalnych zespołów, ruchu brył sztywnych, warunki kinematyczne i brzegowe) sprowadzono do bezwymiarowej postaci w celu poprawienia zbieżności rekurencyjnych procedur w procesie ich numerycznej realizacji.
- Zaproponowany dynamiczny model samolotu jest dobrym przybliżeniem rzeczywistych konstrukcji, szczególnie samolotów o dużym wydłużeniu jego zespołów (skrzydła, kadłuba i usterzenia), do których ten rodzaj dyskretyzacji można stosować. Przyjęta metoda została sprawdzona w praktycznych obliczeniach komputerowych. Jest poprawna i dobrze przystosowana do automatyzacji obliczeń. Algorytm wykazuje szybką zbieżność. Przy przyjęciu większej liczby elementów wyniki z reguły są dokładniejsze.
- W pracy wyznaczono widma drgań dla dwóch wariantów masowych skrzydła (bez paliwa, z pozostałością 50% paliwa w zbiornikach integralnych), bazujących na masie obliczeniowej samolotu [25]. Wynika, że zwiększenie masy skrzydła ma istotny wpływ głównie na zmianę częstości z dominującymi postaciami skrzydłowymi (ω_1 , ω_4 i ω_8) tj. dla zginania, powodując ich spadek w zakresie 15÷35%.
- Przedstawione widmo drgań własnych układu składające się z ośmiu częstości jest widmem uzyskanym dla konkretnych rozkładów masowych i sprężystych. W analizie tego rodzaju, przyjęte wartości danych mają znaczenie rozstrzygające. Dlatego poświęcono im najwięcej uwagi i czasu. Zostały oszacowane na bazie dotychczasowej pracy w problematyce odtwarzania geometrii struktury siłowej samolotu Tu-154 [25] oraz wykonanych szeregu analiz w tym obszarze dla samolotów o różnych układach aerodynamiczno-konstrukcyjnych i samolotów różnego przeznaczenia (np. [13, 14, 15, 16, 18]).
- Przyjęta dyskretyzacja konstrukcji belkowo-bryłowa oraz zastosowana metoda obliczeń jest prosta i „szybka” jeśli chodzi o przygotowanie „fizyczne” pakietu danych w stosunku do współcześnie stosowanych komputerowych systemów obliczeniowych. Ma również zalety w porównaniu z klasycznymi metodami analizy złożonych układów konstrukcyjnych [1, 35, 36].
- do analizy drgań własnych samolotu Tu-154 można z powodzeniem zastosować model oparty na jednej bryle sztywnej łączącej odkształcalne zespoły, czyli wyeliminować środkową część kadłuba jako strukturę odkształcalną [37].

Na zakończenie należy dodać, że przedstawione rozważania, dotyczące modelu dynamicznego i analizy numerycznej, są słuszne dla samolotu symetrycznego. W ostatniej fazie lotu w Smoleńsku, tuż przed katastrofą, samolot nie był symetryczny zarówno masowo jak i sztywnościowo [24]. Znajdował się w awaryjnym stanie konstrukcji [38, 39]. Dla takiego układu, wyżej przedstawione widmo ulegnie zmianie (zarówno częstości i postaci), pojawią się dodatkowe częstości w ruchu niesymetrycznym oraz wynikające ze sprzężeń ruchów podłużnych z bocznymi.

Literatura cytowana

- [1] Bisplinghoff R. L., Ashley H., „Principles of aeroelasticity”, John Wiley, New York London 1962.
- [2] Zienkiewicz O. C., „Metoda elementów skończonych”, Arkady, 1972.
- [3] Kruszewski J., Gawroński W., Wittbrodt E., Najbar F., Grabowski S., „Metoda sztywnych elementów skończonych”, Arkady, Warszawa 1975.
- [4] Szmelter J., „Metody komputerowe w mechanice”, PWN, Warszawa 1980.
- [5] Szmelter J., Dacko M., Dobrociński S., Wieczorek M., „Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji”, Arkady, Warszawa 1979.
- [6] Nowak M., Potkański W., „Metodyka analizy flatteru samolotów lekkich”, Prace Instytutu Lotnictwa, nr 4, Warszawa 1976.
- [7] Olejnik A., „Analiza drgań własnych samolotów oraz zagadnień aerosprężystości układów powierzchniowych”, WAT, 1988.
- [8] Olejnik A., „Aerosprężystość układów powierzchniowych”, X-Serwis, Warszawa 1996.
- [9] Dźygadło Z., Nowotarski I., Olejnik A., „Dyskretny model odkształcalnego samolotu do badania drgań własnych”. Biuletyn WAT, XXXIII, 1984.
- [10] Dźygadło Z., Błaszczuk J., „Dynamiczny model odkształcalnego samolotu do badania drgań własnych metodą elementów skończonych”, Biuletyn WAT, vol. XXVI, nr 4, 1977. „Dynamic model of deformable aircraft for natural vibration analysis by the finite element method”, Journal of Techn. Physics, 18, 2, 1977.
- [11] Dźygadło Z., Błaszczuk J., „Metoda wielostopniowej syntezy struktury do analizy drgań własnych odkształcalnego samolotu”, Mechanika i Komputer, T.4, s. 211÷227, Warszawa-Poznań 1981.
- [12] Dźygadło Z., Błaszczuk J., „Analysis of longitudinal natural vibrations of an aeroplane with moving deformable control surfaces”, Journal of Techn. Physics, 24, 4, 1983. „Analysis of asymmetric natural vibrations of an aeroplane with moving deformable control surfaces”, Journal of Techn. Physics, 25, 3-4, 1984.
- [13] Błaszczuk J., „Dyskretny uogólniony dynamiczny model współczesnego samolotu myśliwskiego do badania drgań własnych metodą elementów skończonych”, Biuletyn WAT, XLII, nr 10, 1993.
- [14] Błaszczuk J., „Dynamiczny model samolotu ze skrzydłem o zmiennej geometrii do badania drgań własnych metodą elementów skończonych”, Biuletyn WAT, XXXVI, nr 3, 1987. „Analiza numeryczna drgań własnych samolotu ze skrzydłem o zmiennej geometrii”, Biuletyn WAT, XXXVIII, 6, 1989. „Numerical analysis of natural vibrations of an aeroplane with symmetrically variable geometry wing”, Journal of Techn. Physics, 30, 1, 1989. „Analiza niesymetrycznych drgań własnych samolotu z płatem o zmiennej geometrii metodą elementów skończonych”, Biuletyn WAT, XXXVIII, nr 6, 1989.
- [15] Błaszczuk J., „Zastosowanie dynamicznych modeli jednowymiarowych do analizy drgań własnych odkształcalnego samolotu”, Cz.I., Rozważania

- teoretyczne, Biuletyn WAT, XXXV, nr 2, 1986. Cz.II., *Realizacja numeryczna*, Biuletyn WAT, XXXVII, nr 3, 1988.
- [16] Błaszczyk J., „*Dynamiczny model samolotu z płatem o niesymetrycznej zmianie geometrii do badania drgań własnych metodą elementów skończonych*”, Biuletyn WAT, XXXX, nr 11, 1990. „*Finite element analysis of natural vibrations of an aeroplane with asymmetric variable wing geometry*”, Journal of Techn. Physics, 34, 1, 1993.
- [17] Dźygadło Z., Błaszczyk J., „*Numeryczna analiza sprzężonych podłużno-bocznych drgań własnych niesymetrycznego samolotu*”, Biuletyn WAT, XXXI, nr 3, 1982. „*Numerical analysis of natural, coupled longitudinal-lateral vibrations of an asymmetric aeroplane*”, Journal Techn. Physics, 23, 2, 1982.
- [18] Błaszczyk J., „*Analiza podłużnych drgań własnych odkształcalnego samolotu z zewnętrznymi podwieszeniami metodą elementów skończonych*”. Biuletyn WAT, XXXI, nr 5, 1983. „*Finite element method of natural, longitudinal vibrations of a deformable aeroplane with suspended masses*”, Journal of Techn. Physics, 24, 2, 1983.
- [19] Błaszczyk J., „*Analiza niesymetrycznych drgań własnych odkształcalnego samolotu z podwieszeniami zewnętrznymi metodą elementów skończonych*”, Biuletyn WAT, XXXIV, 1985. „*Analysis of asymmetric natural vibrations of a deformable aeroplane with suspended bodies by the method of finite elements*”, Journal of Techn. Physics, 27, 3, 1986.
- [20] Brzoska Z., „*Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*”, PWN, Warszawa 1961.
- [21] Błaszczyk J., „*Analizy wyznaczenie położenia środka sił poprzecznych konstrukcji wieloobwodowej na przykładzie struktury skrzydła samolotu „OSA” – modelowanie i analiza numeryczna*”. WAT, Warszawa 2011.
- [22] Гудков А. И., Лешаков П. С., „*Внешние нагрузки и прочность летательных аппаратов*”, Машиностроение, Москва 1968.
- [23] Błażewicz W., „*Budowa samolotów. Obciążenia*”. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1976.
- [24] Błaszczyk J., „*Brzoza smoleńska – aspekty wytrzymałościowe struktury skrzydła samolotu Tu-154*”. Materiały I Konferencji Smoleńskiej, Warszawa 2012.
- [25] Błaszczyk J., „*Próba odtworzenia geometrii struktury siłowej skrzydła samolotu Tu-154*”, Materiały II Konferencji Smoleńskiej, Warszawa, 2013.
- [26] Bielajew N. M., „*Wytrzymałość materiałów*” (tłum z j. ros. - S. Kaliskiego). MON, Warszawa 1954.
- [27] Jakubowicz A., Orłoś Z., „*Wytrzymałość materiałów*”. WN-T, Warszawa 1968.
- [28] Астахов М. Ф., „*Справочная книга по расчёту самолёта на прочность*”, Оборонгиз, Москва 1954.
- [29] Torenbeek E., „*Synthesis of Subsonic Airplane Design*”. Delft University Press 1982.
- [30] „*Проектирование самолётов*”, под редакцией С. М. Егера, Машиностроение, Москва 1983.
- [31] Danilecki St., „*Projektowanie samolotów*”. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
- [32] Глаголев А. Н., Гольдинов М. Я., Григоренко С. М., „*Конструкция самолётов*”, Машиностроение, Москва 1975.
- [33] BJORCK A., DAHLQUIST G., „*Metody numeryczne*”, PWN, Warszawa 1987.
- [34] Dźygadło Z., Błaszczyk J., „*Analiza podłużnych drgań własnych odkształcalnego samolotu metodą elementów skończonych*”, Biuletyn WAT, XXVII, nr 7, 1978. „*Analysis of longitudinal natural vibrations of deformable by the finite-element method*”, Journal of Techn. Physics, 19, 2, 1978.
- [35] Dźygadło Z., Kaliski S., Solarz L., Włodarczyk E. pod red. S. Kaliskiego, „*Drgania i fale w ciałach stałych*”, Warszawa 1966.
- [36] Bogusz W., Dźygadło Z., Rogula D., Sobczyk K., Solarz L., „*Vibrations*”, PWN Warsaw, Elsevier Amsterdam-Oxford-New York – Tokyo 1992.
- [37] Błaszczyk J., „*Jednobryłowy model odkształcalnego samolotu do badania drgań własnych metodą elementów skończonych*”, AERO -Technika Lotnicza, nr 2, 1993.
- [38] Błaszczyk J., „*Analiza numeryczna drgań własnych samolotu w awaryjnych stanach konstrukcji*”, Informator Instytutu Technicznego Wojsk Lotniczych, ITWL wewn. 334/96, s. 11-23, Warszawa 1996.
- [39] Błaszczyk J., „*Analiza numeryczna drgań własnych samolotu z niesymetrycznym płatem nośnym*”, Biuletyn WAT, LX, nr 1, 2011.